A Utilização da Transformada de Hilbert como Técnica de Identificação de Vibrações Torsionais

João Rodrigues Pais, Director de Serviços da SPECMAN
Rui Chedas Sampaio, Escola Superior Náutica Infante D. Henrique
José Vieira Antunes, Laboratório de Dinâmica Aplicada do Instituto Tecnológico e Nuclear

Introdução

A vibração torsional consiste na oscilação angular do(s) rotor(es) de uma máquina. Este tipo de vibração pode ser muito importante em grandes máquinas, como motores de combustão interna e turbogeradores, com diversos rotores ligados por veios e acoplamentos flexíveis.

A presença de modos de vibração torsionais que coincidam com algumas das frequências de excitação pode levar à ocorrência de avarias graves que impeçam o seu funcionamento, como é o caso da fractura do veio de manivelas ou componente rotativo que pode mesmo ser catastrófica.

Como o efeito da torção é fazer variar a rotação do veio, o sinal medido da rotação será por isso sujeito a uma modulação de frequência. Por esta razão utiliza-se frequentemente uma técnica de desmodulação de fase/frequência baseada na conhecida transformada de Hilbert. Basicamente, o que se pretende é filtrar o sinal eliminando a frequência portadora ficando só o sinal modulador, neste caso a vibração torsional. Ora esta filtragem só é possível no domínio complexo. Para obtermos um sinal complexo, ou sinal analítico, é necessário recorrer à transformada de Hilbert. Assim, o sinal complexo terá uma parte real que é o sinal medido e uma parte imaginária que é a transformada de Hilbert do sinal real. Após a filtragem só teremos que calcular a transformada de Fourier da fase do sinal real resultante para identificar a(s) frequência(s) e respectiva(s) amplitude(s) de torção.

Descrição da técnica de desmodulação

Um sinal analítico é um sinal complexo no domínio do tempo cuja componente imaginária é a transformada de Hilbert da componente real (sinal real no domínio do tempo) [1].

O espectro em frequência da transformada de Hilbert pode ser obtido multiplicando as componentes positivas do espectro de frequência do sinal (real) por *–j* (rotação de -90º) e as componentes negativas por *+j* (rotação de +90º). A transformada inversa de Fourier deste espectro permite obter a componente imaginária do sinal analítico.

Assim, se a rotação, em RPM, de um veio for constante, será representada matematicamente por:

$$x(t) = \cos(2\pi f t + \theta) \ [V]$$

onde $f = \dfrac{RPM}{60} \ [Hz]$

A sua transformada de Hilbert será:

$$\tilde{x}(t) = sen(2\pi f t + \theta) \ [V]$$

Logo, o sinal analítico será dado por:

$$\hat{x}(t) = x(t) + j\tilde{x}(t)$$

ou

$$\hat{x}(t) = e^{j(2\pi ft+\theta)}$$

Se a rotação do veio for modulada em frequência (vibração torsional) teremos:

$$\hat{x}(t) = e^{j(2\pi ft+\theta(t))}$$

Multiplicando por $e^{-j2\pi ft}$ obteremos o sinal modulador:

$$m(t) = e^{j(2\pi ft+\theta(t))}e^{-j2\pi ft} = e^{j\theta(t)}$$

Do qual poderemos extrair a fase:

$$\theta(t) = tg^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}(m(t))}{\mathrm{Re}(m(t))}\right)$$

Finalmente, a transformada de Fourier de $\theta(t)$ permitirá obter a(s) frequência(s) do sinal modulador (vibração torsional):

$$\Theta = F(\theta)$$

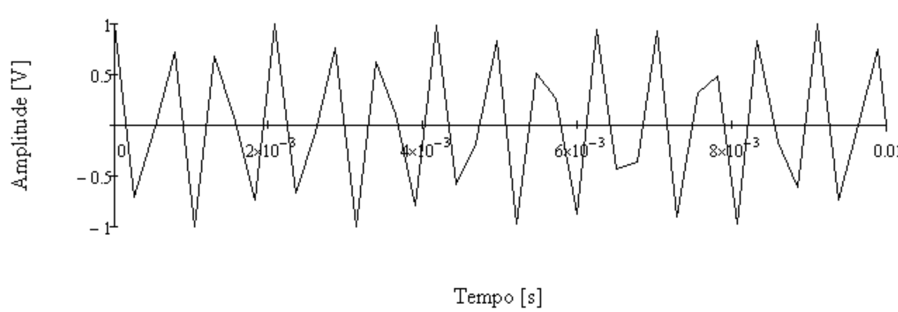
Exemplo numérico

Para melhor ilustrar a aplicação da transformada de Hilbert na determinação das frequências torsionais vejamos o seguinte exemplo numérico.

Suponhamos que o volante do veio de manivelas de um motor Diesel apresenta 142 dentes igualmente espaçados, roda a 600 RPM e está sujeito a uma vibração torsional de $0.5sen(2\pi 34t)\ [rad]$. Logo, podemos representar matematicamente por:

$$x(t) = \cos(2\pi 1420t + 0.5sen(2\pi 34t))\ [V]$$

Se medíssemos a passagem dos dentes através de uma aquisição de T=1.06639 s e N=4096 pontos obteríamos nos primeiros 0.01 s:



Sendo o espaçamento dos pontos dado por Δt :

$$\Delta t = \frac{T}{N} = \frac{1.06639}{4096} = 0.00026\,[s]$$

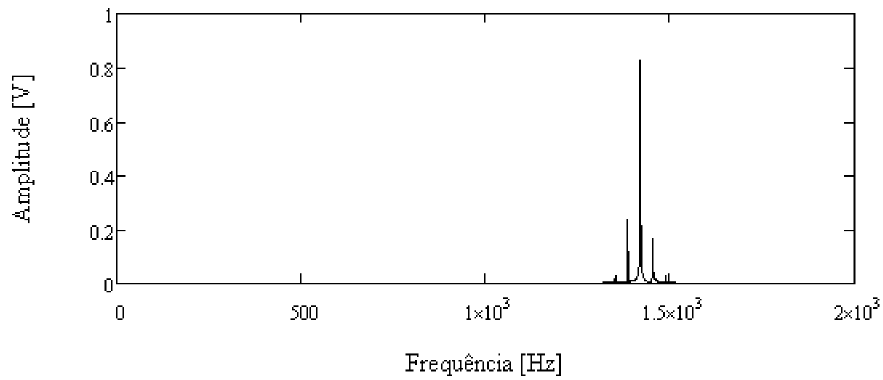
e a sua expressão matemática após digitalização:

$$x_i = \cos(2\pi 1420 i\Delta t + 0.5 sen(2\pi 34 i\Delta t)) \; [V] \quad (i = 0,1,...,N-1)$$

Calculando a *fast fourier transform* do sinal criado numericamente x_i :

$$X = FFT(x)$$

Obtemos o espectro de frequência:



O espectro em frequência da transformada de Hilbert pode então ser obtido multiplicando as componentes positivas do espectro de frequência do sinal (real) por *–j* (rotação de -90º):

$$\tilde{X}_k = X_k(-j) \quad (k = 0,1,...,N/2)$$

Depois, calculando a *inverse fast fourier transform* obtem-se a componente imaginária do sinal analítico:

$$\tilde{x} = IFFT(\tilde{X})$$

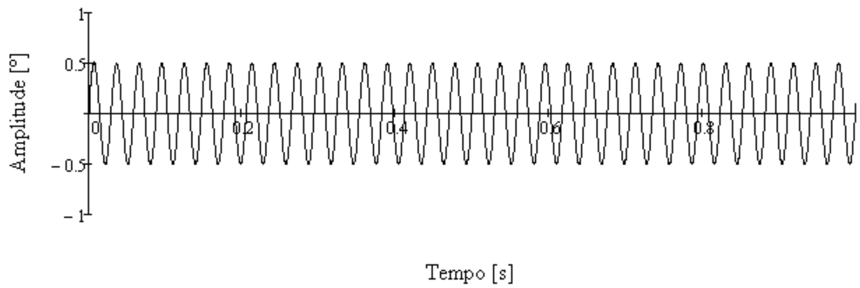
sendo o sinal analítico dado por:

$$\hat{x}_i = x_i + j\tilde{x}_i$$

Multiplicando por $e^{-j2\pi fi\Delta t}$ obtemos o sinal modulador:

$$m_i = \hat{x}_i e^{-j2\pi fi\Delta t}$$

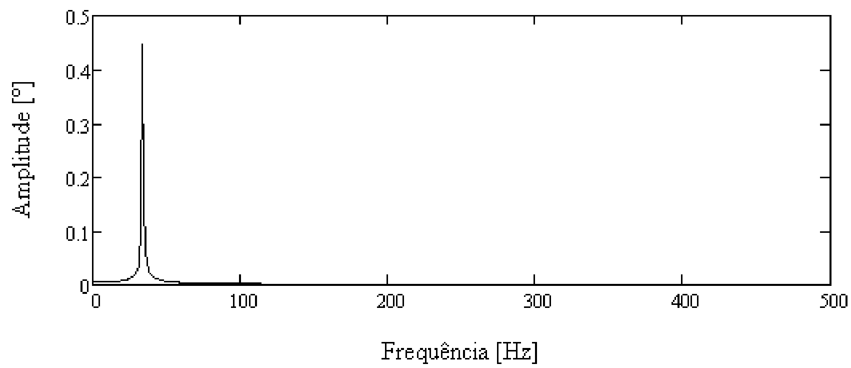
cuja representação temporal do seu ângulo de fase $\theta_i = tg^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}(m_i)}{\mathrm{Re}(m_i)}\right)$ é:



Finalmente, calculando a *fast fourier transform* obtemos o sinal modulador, ou a vibração torsional:

$$\Theta = FFT(\theta)$$

confirmando assim esta técnica:



Exemplo prático

Havendo a suspeita de possível excitação de modos de vibração torsional no motor de propulsão de um navio da Marinha Mercante foi solicitada a medição das vibrações torsionais.

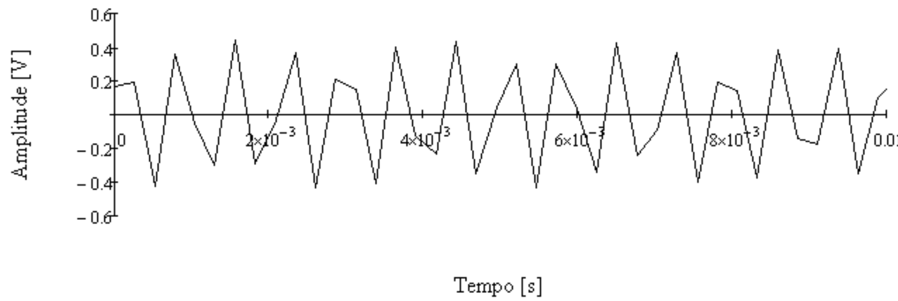
Foram realizados diversos ensaios, em cais e a navegar, que tiveram como objectivo a medição de vibrações torsionais, e a caracterização espectral da vibração torsional, de forma a determinar a presença de componentes que possam estar relacionadas com as frequências principais da máquina ou que sejam coincidentes com as frequências naturais torsionais do próprio sistema, calculadas pelo método de Holzer.

Os diversos ensaios para medição de vibrações torsionais foram realizados com um sensor de não-contacto magnético ligado a um colector de dados.

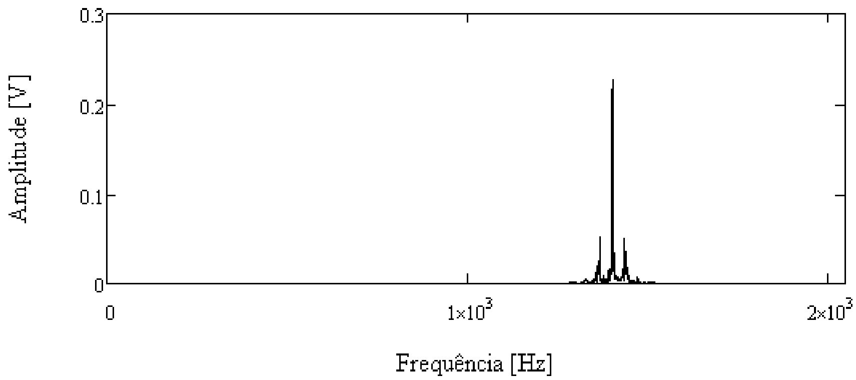
O sensor foi montado numa posição de medição fixa e de forma rígida. O sensor envia um sinal digital que é obtido contra a roda dentada (volante) do veio de manivelas. Este sinal digital varia entre picos máximos e mínimos, sempre que um dente passa pelo sensor. O sinal medido é uma voltagem proporcional à distância da superfície metálica (roda dentada) do extremo do sensor .

Os dados foram directamente registados num colector analisador de dados e em computador, onde, através de um software dedicado e de programação em Mathcad e em Matlab, procedeu-se ao tratamento e realização de análises detalhadas de todos os dados registados.

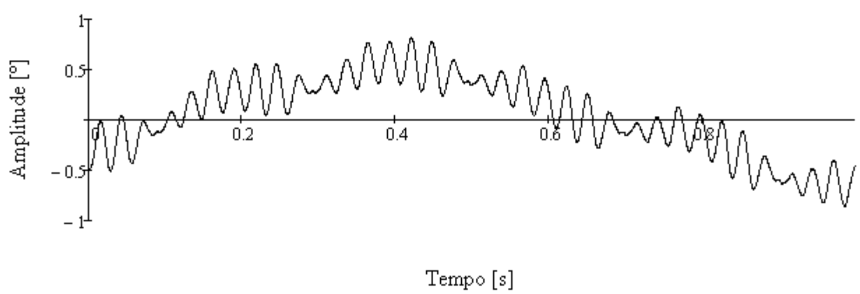
O volante do veio de manivelas do motor apresentava 142 dentes igualmente espaçados e rodava a 600 RPM. A passagem dos dentes foi medida através de uma aquisição de 1.06639 s e 4096 pontos obtendo-se nos primeiros 0.01 s:



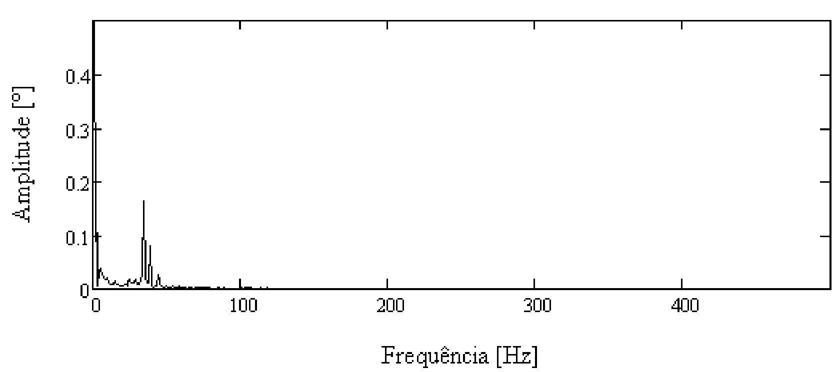
Cujo espectro de frequência é:



Após a desmodulação obteve-se o seguinte sinal temporal:



Cujo espectro de frequência permite identificar as frequências torsionais:



Conclusões

A medição de vibrações torsionais pode ser efectuada sem recorrer a sistemas dedicados existentes no mercado. De facto, com um sensor de não-contacto magnético, um colector de dados vulgar e um programa de cálculo como o MathCad, o MatLab ou o Excel é possível medir as vibrações torsionais.

Referências bibliográficas

[1] – Frequency Analysis, Brüel & Kjær, R. B. Randall, 1987.